ՇԱՐԺՄԱՆ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Հակոբ Հակոբյան

Տարբեր առարկաների դասավանդման ընթացքում միջառարկայական կապերի հաջող իրականացումը մեթոդական կարևոր խնդիր է: Այն օժանդակում է ինչպես առանձին առարկայական դասընթացներում մատուցվող նյութի խորը, համակողմանի յուրացմանը, այնպես էլ՝ բնության երևույթների ամբողջական, համակարգված ընկալմանը: Ֆիզիկայի դպրոցական ծրագիրը լայն հնարավորություններ է ընձեռում այլ առարկաների հետ (մաթեմատիկա, քիմիա, կենսաբանություն, աշխարհագրություն, աշխատանքի ուսուցում և այլն) միջառարկայական բազմաբնույթ կապեր իրականացնելու համար:

Հատկապես սերտ է ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի փոխադարձ կապը: Դժվար է թվարկել մաթեմատիկական այն բոլոր գիտելիքների ցանկը, որն օգտագործվում է ֆիզիկա դասավանդելիս: Այնինչ՝ ֆիզիկայի գիտելիքները մաթեմատիկայի դասերին անհամեմատ վատ են կիրառվում:

Այս հոդվածում այդպիսի կիրառություններից մեկը կքննարկենք: Խոսքը շարժման հարաբերականության և արագությունների գումարման բանաձևի օգտագործման մասին է՝ մաթեմատիկայում շարժման վերաբերյալ որոշ խնդիրներ լուծելիս:

Հայտնի է, որ ցանկացած մեխանիկական շարժում նկարագրելու համար անհրաժեշտ է մեկ այլ մարմին ընտրել, որի նկատմամբ կքննարկվի տվյալ մարմնի դիրքի փոփոխությունը: Այսպիսով՝ շարժման նկարագրության մեջ միշտ առկա է ամենաքիչը երկու մարմին՝ այն, որի շարժումն է նկարագրվում, և այն, որի նկատմամբ շարժումն է քննարկվում (իդեպ, վերջինս կոչվում է *հաշվարկման մարմին*): Առանց նման մարմնի ընտրության՝ շարժման մասին խոսելն անիմաստ է: Նույն մարմինը մի հաշվարկման մարմնի նկատմամբ կարող է շարժման վիճակում գտնվել, իսկ մեկ այլի նկատմամբ՝ այլ տեսակի շարժման կամ դադարի վիճակում: Այդ պատճառով էլ ասում են, որ մարմնի շարժումը և դադարը *հարաբերական* են: Շարժումը նկարագրող մեծությունների և հասկացությունների մեծ մասը (կոորդինատ, ճանապարհ, տեղափոխություն, հետագիծ, արագություն) տարբեր են՝ հաշվարկման տարբեր մարմինների նկատմամբ:

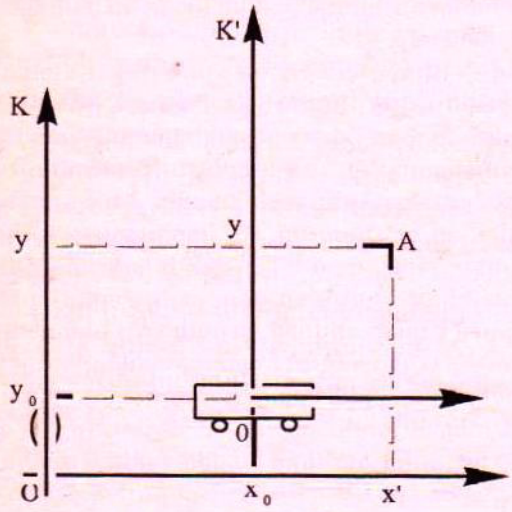
Մարմնի դիրքը տարածության մեջ (հետևաբար՝ և շարժումը) բնորոշելու համար՝ ընտրած հաշվարկման մարմնին որոշակի կոորդինատական համակարգ են կապակցում: Գծագրերում հաշվարկման մարմինը սովորաբար չեն պատկերում՝ նկատի ունենալով, որ կոորդինատների սկզբնակետը կապված է հաշվարկման մարմնի որևէ կետի հետ: Քանի որ շարժումը ժամանակի ընթացքում է կատարվում, ուստի այն նկարագրելու համար անհրաժեշտ է պայմանավորվել նաև ժամանակի գրոյական պահի ընտրության վերաբերյալ: Ընտրած հաշվարկման մարմինը, դրա հետ կապված կոորդինատների համակարգը և ժամանակ չափող սարքը միասին ֆիզիկայում *հաշվարկման համակարգ* են անվանում: Ցանկացած շարժում նկարագրվում է որոշակի (բայց կամայական) ընտրած հաշվարկման համակարգում: Ժամանակը միակն է շարժումը նկարագրող մեծություններից, որը հաշվարկման մարմնի ընտրությունից կախված չէ: Իրոք, դասական մեխանիկայում, որը ճշգրիտ նկարագրում է առօրյա կյանքում հանդիպող համարյա բոլոր երևույթները, ընդունվում է, որ ժամանակի ընթացքը կախված չէ հաշվարկման մարմնի ընտրությունից: Սա հասկացվում է հետևյալ իմաստով: Ենթադրենք՝ երկու դիտորդներ ունենք, ովքեր գտնվում են հաշվարկման երկու տարբեր համակարգերի սկզբնակետերում: Այն պահին, երբ դրանք համընկնում են, դիտորդները ճշտում են իրենց ժամացույցների ցուցմունքները (ժամացույցները համարվում են ճշգրիտ): Ապա՝ ցանկացած պահին, եթե նրանք համեմատեն իրենց ժամացույցների ցուցմունքները, վերջիններս կհամընկնեն:

Այս ենթադրությունը թվում է չափազանց «բնական» և հաստատվում է ամենօրյա փորձով: Սակայն Էյնշտեյնն իր հարաբերականության տեսության մեջ ցույց տվեց, որ ժամանակը ևս կախված է հաշվարկման մարմնի ընտրությունից: Ամեն մի հաշվարկման համակարգ ունի «իր» ժամանակը, այսինքն՝ ժամանակը նույնպես հարաբերական է: Բարեբախտաբար, ժամանակի հարաբերականությունն իրեն զգացնել է տալիս այն դեպքում, երբ մարմինների շարժման արագությունները մոտ են լույսի արագությանը (300000կմ/վ): Առօրյայում մենք գործ ունենք անհամեմատ ավելի փոքր արագությունների հետ, հետևաբար՝ շատ մեծ ճշտությամբ ժամանակը կարող ենք համարել *բացարձակ*:

Միևնույն մարմնի շարժումը հաշվարկման երկու տարբեր համակարգերում նկարագրող մե-

ծությունները միմյանց հետ կապված են որոշակի բանաձևերով: Այդ բանաձևերը բավականաչափ պարզ են:

Նկար 1-ում պատկերված են հաշվարկման երկու տարբեր մարմինների հետ կապված կոորդինատային համակարգեր.



Նկար 1

A կետով պատկերված է շարժվող մարմինը: A մարմնի դիրքը K համակարգում (որը կապված է հողի նկատմամբ անշարժ ծառի հետ) որոշվում է (x, y) կոորդինատներով, իսկ K' համակարգում (որը կապված է ծառի նկատմամբ շարժվող ավտոմեքենայի հետ) նույն մարմնի դիրքը որոշվում է (x', y') կոորդինատներով: (x_0, y_0)-ն ավտոմեքենայի կոորդինատներն են ծառի նկատմամբ, ժամանակի տվյալ պահին:

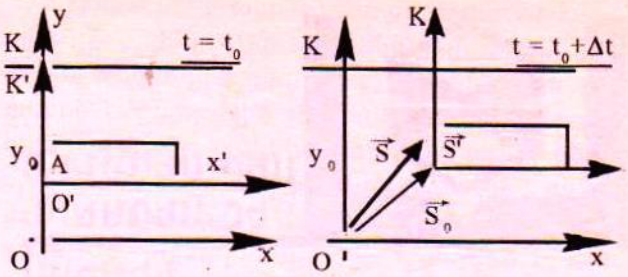
Նկար 1-ից ակնհայտ է, որ.

$$\begin{cases} x = x' + x \\ y = y' + y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

Այս պարզ բանաձևերի օգնությամբ, եթե հայտնի են մարմնի կոորդինատները մի հաշվարկման համակարգում, կարելի է որոշել դրա կոորդինատները մեկ այլ հաշվարկման համակարգում: Սովորաբար, հաշվարկման մարմիններից մեկը (օրինակ՝ ծառը) պայմանականորեն համարում են անշարժ, իսկ մյուսը (ավտոմեքենան)՝ շարժական (իհարկե, կարելի է և հակառակը պայմանավորվել):

Շարժումը նկարագրող հաջորդ մեծությունը տեղափոխությունն է: Տեղափոխություն են անվանում այն վեկտորը, որը մարմնի սկզբնական դիրքը միացնում է նրա վերջնական դիրքին: Հեշտ է կռահել, որ տեղափոխությունը նույնպես հարաբերական է:

Քննարկենք մի պարզ օրինակ: Լաստին կանգնած մարդը շարժվում է լաստի լայնքով՝ մի եզրից մյուսը (Նկար 2): Նկար 2-ից պարզ երևում է, որ մարդը որոշակի Δt ժամանակում, լաստի և ափի հետ կապված հաշվարկման համակարգերում տարբեր տեղափոխություններ է կատարում:



Նկար 2

Նկար 2-ում $\vec{S}$-ը մարմնի տեղափոխությունն է ափի հետ կապված հաշվարկման համակարգում, $\vec{S}'$-ը՝ մարդու տեղափոխությունը լաստի նկատմամբ, իսկ $\vec{S}_0$-ն՝ նույն ժամանակահատվածում լաստի կատարած տեղափոխությունը՝ ափի հետ կապված հաշվարկման համակարգում:

Նկար 2-ից երևում է, որ.

$$\vec{S} = \vec{S}' + \vec{S}_0: \qquad (2)$$

Բանաձև (2)-ից հեշտ է ստանալ նաև տարբեր հաշվարկման համակարգերում մարմնի արագությունների միջև եղած կապը: Հիշելով, որ ժամանակը տարբեր հաշվարկման համակարգերում նույնն է, (2) հավասարման երկու կողմերը Δt-ի բաժանելով՝ կստանանք.

$$\frac{\vec{S}}{\Delta t} = \frac{\vec{S}'}{\Delta t} + \frac{\vec{S}_0}{\Delta t}: \qquad (3)$$

Այստեղ $\frac{\vec{S}}{\Delta t} = \vec{V}$ մարմնի արագությունն է ափի հետ կապված հաշվարկման համակարգում,

$\frac{\vec{S}'}{\Delta t} = \vec{V}'$՝ մարմնի արագությունը լաստի հետ կապված հաշվարկման համակարգում,

$\frac{\vec{S}_0}{\Delta t} = \vec{V}_0$՝ լաստի արագությունն ափի հետ կապված հաշվարկման համակարգում:

Հաշվի առնելով նոր նշանակումները՝ բանաձև (3)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_0: \qquad (4)$$

Ըստ բանաձև (4)-ի՝ մարմնի արագությունն անշարժ համակարգի նկատմամբ հավասար է շարժական համակարգի նկատմամբ մարմնի արագության և անշարժի նկատմամբ շարժականի ունեցած արագության վեկտորական գումարին:

Բանաձև (4)-ից կարելի է ստանալ հետևյալ առնչությունը՝ շարժական համակարգում մարմնի արագությունը հաշվելու համար.

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_0: \qquad (5)$$

Հանրահաշվական խնդիրների լուծման տեսանկյունից՝ առավել կարևոր է այն դեպքը, երբ շարժական համակարգի և մարմնի արագություններն անշարժ համակարգի նկատմամբ ուղղված են մի գծով: Եթե անշարժ համակարգի նկատմամբ շարժական համակարգը և մարմինը շարժվում են

հակառակ ուղղություններով, ապա բանաձև (5)-ից կստացվի.

$$|\vec{V}'| = |\vec{V}| + |\vec{V}_0|: \qquad (6)$$

Եթե անշարժ համակարգի նկատմամբ շարժական համակարգը և մարմինը շարժվում են նույն ուղղությամբ, ապա.

$$|\vec{V}'| = |\vec{V}| - |\vec{V}_0|: \qquad (7)$$

Ահա՛ այն բանաձևերը, որոնք թույլ են տալիս մի հաշվարկման համակարգում մարմնի շարժումը նկարագրող մեծություններն արտահայտել մեկ այլ հաշվարկման համակարգի տվյալներով.

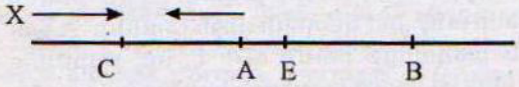
$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' \\ t = t' \\ \vec{V} = \vec{V}' + V_0 \end{cases}$$

Ֆիզիկայում այս բանաձևերը կոչվում են Գալիլեյի ձևափոխման բանաձևեր: Հանրահաշվի խնդրագրքերում շարժման վերաբերյալ խնդիրները սովորաբար ձևակերպված են լինում գետնի (հողի) հետ կապված հաշվարկման համակարգում: Այդ դեպքում չի նշվում նույնիսկ հաշվարկման մարմինը, իսկ գետնի նկատմամբ (անշարժ համակարգ) մարմնի արագությունն անհաջող անվանվում է մարմնի սեփական արագություն: Երբեմն ավելի հեշտ է անցնել շարժական համակարգի, որտեղ և լուծել խնդիրը, ու ապա՝ ստացված արդյունքները «վերադարձնել» գետնի հետ կապված համակարգ: Ուստի պետք է կարողանալ խնդրի պայմանները ճիշտ վերարտադրել՝ շարժական համակարգում գտնվող դիտորդի տեսանկյունից:

Այժմ քննարկենք մի քանի բնորոշ օրինակ:

Խնդիր 1. **Լողորդը լողում է գետի հոսանքին հակառակ ուղղությամբ: A կետում (նկար 3) նա կորցնում է դատարկ տափաշիշը: 20 րոպե լողալուց հետո նա հայտնաբերում է կորուստը և, փոխելով շարժման ուղղությունը, B կետում հասնում է տափաշշին: A-ից B հեռավորությունը 2 կմ է: Որքա՞ն է գետի հոսանքի արագությունը:**

Խնդիրը լուծենք *գետնի* հետ կապված հաշվարկման համակարգում: Ջրի հոսանքի արագությունը գետնի նկատմամբ նշանակենք x, իսկ լողորդի արագությունը «կանգնած» ջրում (արագությունը՝ ջրի հետ կապված հաշվարկման համակարգում)՝ y:



Նկար 3

A-ից C տեղափոխվելիս լողորդը գետնի նկատմամբ շարժվում է (y - x) արագությամբ և 20 րոպեում անցնում է $AC = \frac{1}{3}(y - x)$ կմ ճանապարհ: Այդ նույն ժամանակում տափաշիշը, շարժվելով ջրի հոսանքի արագությամբ, E կետն է հասնում, ընդ որում՝ $AC = \frac{1}{3}x$ կմ: Նկար 3-ից երևում է, որ, մինչև տափաշիշը հասնելը, լողորդը կանցնի $CB = \frac{1}{3}(y - x) + 2$ կմ, իսկ տափաշիշը՝ $EB = 2 - \frac{1}{3}x$ կմ ճանապարհ:

Այդ ճանապարհները նրանք անցնում են հավասար ժամանակահատվածներում՝ շարժվելով, համապատասխանաբար, (x + y) և x արագություններով: Խնդրի լուծման համար հետևյալ հավասարումն է ստացվում.

$$\frac{\frac{1}{3}(y - x) + 2}{x + y} = \frac{2 - \frac{1}{3}x}{x}:$$

Լուծելով այս հավասարումը՝ կստանանք, որ գետի հոսանքի արագությունը հավասար է 3 կմ/ժ:

Այժմ խնդիրը լուծենք *տափաշշի* հետ կապված հաշվարկման համակարգում: Այս համակարգում տափաշիշը գտնվում է դադարի վիճակում, իսկ լողորդը 20 րոպեի ընթացքում հեռանում է տափաշշից և ապա՝ նույն արագությամբ հետ վերադառնում (տափաշշի մոտ): Ակնհայտ է, որ լողորդը կծախսի 2x20 = 40 ր. ժամանակ: Այդ ժամանակում տափաշիշը 2 կմ կտեղափոխվի ափի նկատմամբ: Հետևաբար՝ տափաշշի արագությունը գետնի նկատմամբ (այսինքն՝ հոսանքի արագությունը) հավասար է $2 : \frac{2}{3} = 3$ կմ/ժ:

Լուծման վերջին եղանակի առավելությունն ակներև է: Խնդիրը լուծվում է բանավոր՝ առանց հավասարում կազմելու:

Խնդիր 2. **A վայրից գետի հոսանքի ուղղությամբ դուրս է գալիս մոտորանավակը: Այդ պահին դրա առջևում լողում էին երկու լաստ, որոնցից առաջինի հեռավորությունն A կետից 8 կմ էր: Որոշ ժամանակ անց մոտորանավակը, անցնելով առաջին լաստից, հասնում է երկրորդին, այնուհետև հետ է դառնում և նորից հանդիպում առաջինին: Վերջին հանդիպումը տեղի է ունենում մոտորանավակի A-ից դուրս գալու պահից 1 ժ 30 ր. անց: Որոշե՛ք լաստերի միջև եղած հեռավորությունը, եթե մոտորանավակի արագությունը 20 կմ/ժ է:**

Խնդրի լուծումը *գետնի* հետ կապված հաշվարկման համակարգում հետևյալն է: Ջրի հոսանքի արագությունը նշանակենք x, A կետից դուրս գալուց հետո մոտորանավակի՝ առաջին լաստին հասնելու ժամանակը՝ t_1, մոտորանավակի՝ առաջին լաստին հասնելուց հետո մինչև երկրորդ լաստին հանդիպելը՝ t_2, և մոտորանավակի երկրորդ

լաստից հեռանալուց հետո մինչև առաջին լաստին կրկին հանդիպելը՝ t_3: Լաստերի միջև եղած հեռավորությունը նշանակենք S: Ըստ խնդրի պայմանի՝ կարելի է կազմել հետևյալ հավասարումները.

$$\begin{cases} t_1(20+x) = xt_1 + 8 \\ t_2(20+x) = xt_2 + S \\ t_3(V-x) = S - t_3x \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1,5 \end{cases}$$

Լուծելով ստացված համակարգը՝ կորոշենք S-ը.

$$t_1 = \frac{8}{20},$$

$$t_2 = \frac{S}{V},$$

$$t_3 = \frac{S}{V},$$

$$\frac{8}{20} + \frac{S}{V} + \frac{S}{V} = 1,5,$$

որտեղից S = 11 կմ:

Իսկ ի՞նչ տեսք կունենա այս խնդիրն *առաջին լաստի* հետ կապված հաշվարկման համակարգում: Երկու լաստն էլ այդ համակարգում կգտնվեն դադարի վիճակում: Մոտորանավակը, շարժման ուղղությունից անկախ, կշարժվի միևնույն՝ 20 կմ/ժ արագությամբ, այսինքն՝ հետևյալ պարզ խնդիրը կստացվի.

Նավակը (8+2S) հեռավորությունն անցնում է 1,5 ժամում՝ շարժվելով 20 կմ/ժ արագությամբ: Որոշե՛ք S հեռավորությունը:

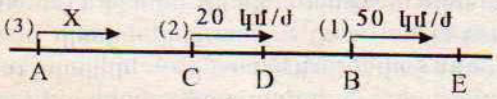
Լուծումն ակնհայտ է՝

S = 11 կմ:

Ինչպես տեսնում ենք՝ այստեղ ես հաջողվեց շրջանցել հավասարումներ կազմելու գործողությունները:

Խնդիր 3. **Միևնույն կետից միաժամանակ երկու ավտոմեքենա է դուրս գալիս և շարժվում նույն ուղղությամբ: Մեքենաներից մեկի արագությունը 50 կմ/ժ է, իսկ մյուսինը՝ 40 կմ/ժ: Կես ժամ անց նույն կետից, նույն ուղղությամբ դուրս է գալիս երրորդ ավտոմեքենան, որն առաջին ավտոմեքենային հասնում երկրորդին հանդիպելուց 1,5 ժ անց: Որոշե՛ք երրորդ մեքենայի արագությունը:**

Գետնի հետ կապված հաշվարկման համակարգում խնդիրը լուծելու համար կատարենք հետևյալ նշանակումները. t՝ այն ժամանակը, որի ընթացքում երրորդ մեքենան հանդիպում է առաջինին, x՝ երրորդ մեքենայի արագությունը: Ավտոմեքենաների դիրքը երրորդ մեքենայի դուրս գալու պահին պատկերված է նկար 4-ում:



Նկար 4

Ըստ խնդրի պայմանի՝ AC = 20 կմ, և AB = 25 կմ (երկրորդ և առաջին մեքենաների անցած ճանապարհները կես ժամում): D-ն այն կետն է, որտեղ երրորդ ավտոմեքենան հանդիպում է երկրորդին, իսկ E-ն՝ այն կետը, որտեղ երրորդ ավտոմեքենան հանդիպել է առաջինին:

Համապատասխան հավասարումները կունենան հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} xt - 40t = 20 \\ x(t+1,5) - 50(t+1,5) = 25 \end{cases}$$

Առաջին հավասարումից կստանանք $t = \frac{20}{x-40}$

իսկ երկրորդից՝ $t = \frac{25}{x-50} - 1,5$, այսինքն՝ ստացվում է հետևյալ քառակուսի հավասարումը.

$$\frac{25}{x-50} - \frac{20}{x-40} = 1,5:$$

Լուծելով այդ հավասարումը՝ կգտնենք.

x = 60 կմ/ժ:

Իսկ այժմ խնդիրը ձևակերպենք *երրորդ ավտոմեքենայի* հետ կապված հաշվարկման համակարգում՝ ժամանակի սկզբնական պահը համարելով A կետից դրա դուրս գալու պահը և դրա արագությունը V նշանակելով: Խնդիրը կձևակերպվի արդեն հետևյալ տեսքով.

Առաջին մեքենան գտնվում է երրորդից 25 կմ, իսկ երկրորդը՝ 20 կմ հեռավորության վրա: Երկուսն էլ միաժամանակ սկսում են շարժվել դեպի երրորդ ավտոմեքենան, համապատասխանաբար, (V-50) և (V-40) արագություններով: Առաջին ավտոմեքենան երրորդին հասնում է 1,5 ժամ ավելի ուշ, քան՝ երկրորդը: Որոշե՛ք երրորդ ավտոմեքենայի արագությունը:

Հեշտ է համոզվել, որ այսպիսի ձևակերպման դեպքում խնդրի լուծման համար միանգամից ստացվում է արդեն մեկ ծանոթ քառակուսի հավասարումը.

$$\frac{25}{V-50} - \frac{20}{V-40} = 1,5:$$

Այս դեպքում ևս խնդրի լուծման պարզեցումն ակնհայտ է:

Դիտարկված օրինակները թույլ են տալիս եզրակացնելու, որ այն խնդիրներում, որտեղ շարժանը մեկից ավելի մարմիններ են մասնակցում, հնարավոր է անցնել շարժվող մարմիններից որևէ մեկի հետ կապված հաշվարկման համակարգին: Այդ դեպքում մյուս շարժումների նկարագրությունը բավականաչափ պարզեցվում է, ինչը և զգալիորեն հեշտացնում է խնդրի լուծումը:

Հարկ է հիշեցնել, որ այս ձևը կիրառելի չէ այն դեպքում, երբ մարմինները շարժվում են գետնի նկատմամբ անշարժ կետերի միջև (ասենք՝ A քաղաքից B քաղաքը): Բանն այն է, որ, շարժվող մարմնի հետ կապված հաշվարկման համակարգին անցնելիս, իրենք՝ քաղաքները, նույնպես հայտնվում են «շարժման» վիճակում, այսինքն՝ շարժվող մարմինների թիվը չի պակասում: